

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2022-2023 гг

Первый этап

11 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Михаил выезжает из Бердска в Черепаново в 8:00 утра; В тот же день, в то же время и по той же дороге ему навстречу из Черепаново в Бердск выезжают Харитон и Николай. В 9:30 утра Харитон находился ровно на полпути между Михаилом и Николаем; в 10:00 утра Михаил находился ровно на полпути между Харитоном и Николаем. Определите, в какое время встретились Михаил и Харитон, и в какое время встретились Михаил и Николай, если все они двигались с постоянными скоростями?

11.2. Найти все четвёрки действительных чисел (a, b, c, d) таких, что $a(b + c) = b(c + d) = c(d + a) = d(a + b)$.

11.3. Доказать, что для любых трёх положительных действительных чисел x, y, z выполнено неравенство $(x^2 + y^2)^2 \geq (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)(y + z - x)$. Указать все тройки x, y, z , для которых в нём достигается равенство.

11.4. Неправильный шестиугольник $ABCDEF$, у которого стороны AB , CD и EF равны, вписан в окружность с центром O , вершины располагаются на окружности по часовой стрелке в алфавитном порядке. Обозначим точку пересечения диагоналей AC и BD за M , диагоналей CE и DF - за N , а диагоналей AE и BF - за K . Докажите, что треугольники ACE и MNK подобны.

11.5. В одной из вершин куба сидят N бабочек, остальные семь вершин пусты. Каждую минуту с одной из вершин куба по одной бабочке перелетают в каждую из трёх соседних с данной по ребру вершин куба, одна – в противоположную (относительно центра) вершину, и ещё одна – улетает вдаль и больше не возвращается. Найти все значения N , при которых через некоторое время в каждой вершине куба может оказаться одинаковое число бабочек.